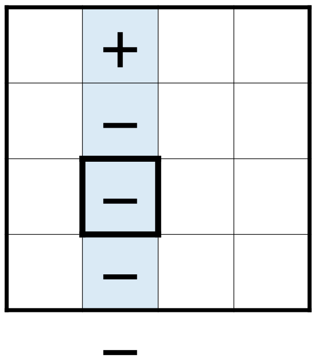
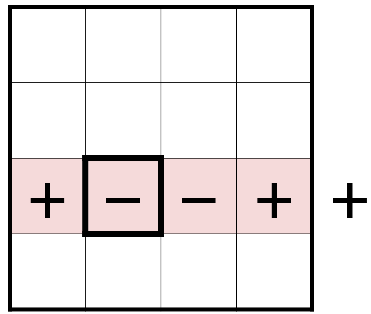
Merminův–Peresův kouzelný čtverec

např.: P. K. Aravind, Am. J. Phys. 72 (2004) 1303

Alice **Bob**

čtverec $N \times N$





Alice dostane zadaný sloupec

má ho doplnit $\pm$ *tak aby součin byl* $-$

Bob dostane zadaný řádek

má ho doplnit $\pm$ *tak aby součin byl* $+$

úkolem je shodnout se v buňce na průsečíku

Alice

Bob

řešení:

dopředu si dohodnout předvyplněný čtverec splňující podmínky

součin v sloupci –

+	+	−	−
+	−	−	+
+	−	−	+
−	−	+	+
−	−	−	−

+	+	−	−	+
+	−	−	+	+
+	−	−	+	+
−	−	+	+	+

součin v řádku +

úkolem je shodnout se v buňce na průsečíku

úspěšnost je s jistotou zaručena

Alice

Bob

čtverec 3×3

dopředu si dohodnout předvyplněný čtverec splňující podmínky

součin v sloupci $-$

$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$
$+$	$+$	x
$-$	$-$	x

$$x = ?$$

$+$	$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$	$+$
$+$	$+$	x	x

součin v řádku $+$

úplná úspěšnost nelze zajistit

čtverec 3×3 – kvantová varianta

- pozorovatelné pro spiny v kolmých směrech
  - $|\uparrow\rangle \quad |\downarrow\rangle \qquad \hat{\sigma}_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$
  - $|\odot\rangle \quad |\otimes\rangle \qquad \hat{\sigma}_x = |\odot\rangle\langle\odot| - |\otimes\rangle\langle\otimes|$
  - $|\rightarrow\rangle \quad |\leftarrow\rangle \qquad \hat{\sigma}_y = |\rightarrow\rangle\langle\rightarrow| - |\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|$

$$|\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$|\otimes\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$$

$$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

- platí
  - $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \hat{\mathbb{1}}$
  - $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = i\hat{\sigma}_z \quad \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = i\hat{\sigma}_x \quad \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = i\hat{\sigma}_y$
  - $\hat{\sigma}_x \quad \hat{\sigma}_y \quad \hat{\sigma}_z$ spolu nekomutují – nelze měřit zároveň

předvyplněný čtverec kvantovými pozorovatelnými splňující podmínky

Alice i Bob budou mít 2 spiny:

horní

$\otimes$

dolní

pro každý spin jedna sada pozorovatelných

součin v řádku +

součin v sloupci −

$$
\begin{array}{|c|c|c|c}
\hline
\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_z & \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x & \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_y & \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\
\hline
\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_x & \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y & \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z & \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\
\hline
\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y & \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z & \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x & \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{-\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}} & \multicolumn{1}{c}{-\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}} & \multicolumn{1}{c}{-\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}} &
\end{array}
$$

v každém řádku a sloupci pozorovatelné komutují

Alice

$\begin{matrix}\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$
$\begin{matrix}\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$
$\begin{matrix}\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$
$-\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$-\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$-\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	

Bob

$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_y \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_x \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_x\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_y\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$
$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_x\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_y \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_y\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_x \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$
$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_x \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_y\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_z\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_y \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\sigma}_x\end{matrix}$	$\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$
$-\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$-\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	$-\begin{matrix}\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \\ \otimes \\ \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}\end{matrix}$	

stav: dvojitý EPR stav

$$|\,S\,\rangle \;=\; \begin{matrix} |\mathrm{EPR}\rangle \\ \otimes \\ |\mathrm{EPR}\rangle \end{matrix}$$

Alice a Bob provedou měření pozorovatelných v zadaných sloupci a řádku

(lze, protože pozorovatelné komutují)

výsledky vyplní do sloupce a řádku

(podmínky jsou splněny díky platnosti pro pozorovatelné)

na průsečíku se výsledek bude vždy shodovat

stav – dvojitý EPR stav

$$|\,\mathrm{S}\,\rangle = \begin{matrix} |\mathrm{EPR}\rangle \\ \otimes \\ |\mathrm{EPR}\rangle \end{matrix}$$

součin pozorovatelných na průsečíku zadaného řádku a sloupce

$$\begin{matrix} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_i \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_j \end{matrix}$$

EPR antikorelace jak pro horní, tak dolní částici

$$\left\langle \mathrm{S} \left| \begin{matrix} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_i \\ \otimes \\ \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_j \end{matrix} \right| \mathrm{S} \right\rangle = \begin{matrix} -1 \\ \times \\ -1 \end{matrix} = 1$$

Merminův–Peresův kouzelný čtverec

3×3 hru lze díky kvantovým korelacím vyhrát vždy

$$\Downarrow$$

netrivialita kvantového chování